Od skupa prirodnih brojeva do skupa kvaterniona

Željko Zrno[1], *Neven Jurić*[2]

Uvod

Što je matematika? Na što prvo čovjeka asocira riječ matematika? Matematika je egzaktna znanost koja se bavi kvantitativnim odnosima među veličinama. Prva asocijacija kod većine ljudi na riječ matematika je računanje s brojevima. Osnovni pojam matematike je doista broj. Pojam s kojim se svatko od nas upoznao još u osnovnoj školi. Ovladavanjem matematikom počinje najtemeljitijim skupom brojeva. Taj se skup označava slovom $\mathbb{N}$ i zove se *skup prirodnih brojeva*. To su brojevi: jedan, dva, tri, četiri, pet,. . . , deset,. . . što se zapisuje $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 10, \ldots\}$. U ovom članku cilj je napraviti "šetnju" od skupa prirodnih brojeva do manje poznatog, ali važnog skupa brojeva – *skupa kvaterniona*.

U svim tim skupovima brojeva prezentirat ćemo svojstva standardnih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Dakle, čitatelja ćemo uvesti u izgradnju algebarske strukture na jednostavan i postupan način. Sam skup i skup na kojem je definirana algebarska operacija nije isto. Naprotiv, razlika je velika, jer u drugom slučaju možemo s elementima skupa računati. Dat ćemo definiciju pojma *grupe* koja će se spominjati u članku.

Kažemo da je $G = (G, \cdot)$, gdje je $\cdot : G \times G \to G$, grupa ako vrijede sljedeća svojstva:

(G1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, za svake x, y, z iz G (asocijativnost),

(G2) postoji e iz G tako da je $e \cdot x = x \cdot e = x$, za svaki x iz G (postojanje neutralnog elementa),

(G3) za svaki x iz G postoji x^{-1} iz G tako da je $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ (postojanje inverznog elementa).

Za preslikavanje "$\cdot$" ćemo koristiti zbrajanje ili množenje.

Skup realnih brojeva

Zbrajanje i množenje nisu jedine osnovne računske operacije. Pored njih postoje oduzimanje i dijeljenje, ali se one razlikuju od zbrajanja i množenja po tome što za njih ne vrijedi

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})\ (x - y \in \mathbb{N}) \quad \text{i} \quad (\forall x, y \in \mathbb{N})\ (x : y \in \mathbb{N}).$$

Bilo bi poželjno imati skup za koji to vrijedi. Zbog toga je u matematici skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ proširen *skupom cijelih brojeva*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 10, \ldots\}$$

koji ispunjava uvjet $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ (x - y \in \mathbb{Z})$.

[1] Željko Zrno, prof. matematike, viši predavač na kninskom Veleučilištu "Marko Marulić";
e-pošta: zeljko.zrno@veleknin.hr

[2] Neven Jurić, dipl. ing. matematike, Zagreb.

$(\mathbb{Z},+)$ je komutativna grupa kojoj je neutralni element $e=0$, a svaki $x\in\mathbb{Z}$ ima svoj inverz $-x\in\mathbb{Z}$, tj. $x+(-x)=(-x)+x=0$.

Da li je za svaki $x,\ y\in\mathbb{Z}$ izvedivo dijeljenje, tj. $x:y\in\mathbb{Z},\ y\neq 0$? Znamo da nije, pa se skup $\mathbb{Z}$ proširuje na *skup racionalnih brojeva*.

S obzirom da se svaki cijeli broj $x\in\mathbb{Z}$ može napisati u obliku razlomka $\frac{x}{1}$, dakle, skup cijelih brojeva podskup je skupa racionalnih brojeva, $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$. Čitatelju ostavljamo da analizira svojstva algebarskih struktura $(\mathbb{Q},+)$ i $(\mathbb{Q},\cdot)$.

Kao što je poznato, skup $\mathbb{Q}$ se dalje proširuje do *skupa realnih brojeva* $\mathbb{R}$. Naime, kvadratnim korjenovanjem broja 2 napuštamo skup racionalnih brojeva. Znamo da se $\sqrt{2}$ ne može napisati u obliku razlomka, a sve takve brojeve nazivamo *iracionalnim* i označavamo s $\mathbb{I}$. Unija skupa racionalnih i iracionalnih brojeva daje skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$.

Na skupu $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva definirane su dvije operacije, zbrajanje $(+)$ i množenje $(\cdot)$, tj. algebarske strukture $(\mathbb{R},+)$ i $(\mathbb{R},\cdot)$ su grupoidne, sa sljedećim svojstvima:

(A1) Zbrajanje je asocijativno tj. za sve $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ vrijedi $(x+y)+z=x+(y+z)$.

(A2) Postoji neutralni element $0\in\mathbb{R}$ za zbrajanje sa svojstvom $x+0=0+x=x$ za svaki $x\in\mathbb{R}$.

(A3) Svaki $x\in\mathbb{R}$ ima svoj inverz $-x\in\mathbb{R}$ takav da je $x+(-x)=(-x)+x=0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$.

(A4) Zbrajanje je komutativno tj. za sve $x,\ y\in\mathbb{R}$ vrijedi $x+y=y+x$.

(A5) Množenje je asocijativno tj. za sve $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ vrijedi $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$.

(A6) Postoji neutralni element za množenje, $1\in\mathbb{R}$, takav da za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $x\cdot 1=1\cdot x=x$.

(A7) Za svaki $x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$, postoji inverz $\frac{1}{x}$ takav da je $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1$.

(A8) Množenje je komutativno tj. za sve $x,\ y\in\mathbb{R}$ vrijedi $x\cdot y=y\cdot x$.

(A9) Množenje je distributivno prema zbrajanju $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, za sve $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$.

Grupa $(\mathbb{R},+)$ zove se aditivna grupa realnih brojeva, a $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ $(\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\})$ multiplikativna grupa realnih brojeva različitih od nule. Radi se o Abelovim grupama. Ovdje navodimo relaciju koja vrijedi: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Sva ova navedena svojstva, od (A1) do (A9), koristit ćemo u daljnjem proučavanju skupova brojeva.

Skup kompleksnih brojeva

Uređene parove realnih brojeva možemo promatrati kao *kompleksne brojeve*. Skup kompleksnih brojeva označujemo s $\mathbb{C}$, tj. $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$, s definiranim operacijama $+$ i $\cdot$ na $\mathbb{C}$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \tag{1}$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-db,ad+cb), \tag{2}$$

gdje je $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$.

Za dva kompleksna broja (a, b) i (c, d) kažemo da su jednaki i pišemo $(a, b) = (c, d)$ onda i samo onda ako je $a = c$ i $b = d$.

Dakle, dobili smo grupoidne strukture $(\mathbb{C}, +)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Prije nego što iznesemo njihova svojstva, pokažimo kako možemo još zapisivati kompleksne brojeve.

Jednakost
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$
ili
$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$
možemo pisati u obliku
$$(a, b) = a + bi, \quad \text{(uređeni par } (a, 0) \text{ identificiramo s realnim brojem } a\text{)},$$
gdje je $i = (0, 1)$ kojeg nazivamo *imaginarna jedinica*.

Uobičajeno je da se kompleksan broj označava jednim slovom, najčešće sa z, tj. $z = a + bi$. Za zapis broja z u obliku $a + bi$ kažemo da je *algebarski oblik* tog broja, kome je a realni, a b imaginarni dio. Znači, kompleksnom broju (a, b) možemo pridružiti uređeni par (a, b) realnih brojeva i obratno, uređenom paru (a, b) realnih brojeva možemo pridružiti kompleksni broj $a + bi$.

Možemo pisati, u skladu s gornjim i zbog (2), $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, tj. dobili smo jednakost $i^2 = -1$.

Svakom kompleksnom broju $z = a + bi$, možemo pridružiti njegov *konjugirano kompleksni*, kojeg označavamo i definiramo sa $\overline{z} = a - bi$, gdje vrijedi $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Pokažimo svojstva koja vrijede za operacije zbrajanja i množenja u skupu $\mathbb{C}$.

Asocijativnost zbrajanja. Vrijedi:
$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$
ili
$$[(a + c) + e, (b + d) + f] = [a + (c + e), b + (d + f)]$$
jer je zbrajanje realnih brojeva asocijativna operacija.

Asocijativnost množenja. Vrijedi:
$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)].$$
Provjerite sami ovu jednakost.

Distributivnost množenja prema zbrajanju. Vrijedi:
$$(a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f).$$
Provjerite to sami.

Postojanje neutralnih elemenata. Skup $\mathbb{C}$ sadrži elemente $(0, 0)$ i $(1, 0)$ tako da za svaki $(a, b) \in \mathbb{C}$ vrijedi
$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$
$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b).$$
Prema tome, $(0, 0)$ je neutralni element u $(\mathbb{C}, +)$, a $(1, 0)$ je neutralni element u $(\mathbb{C}, \cdot)$.

Postojanje inverza u $(\mathbb{C}, +)$. Za svaki $(a, b) \in \mathbb{C}$ postoji $(-a, -b) \in \mathbb{C}$ tako da vrijedi
$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$
Dakle je $-(a, b) = (-a, -b)$.

Postojanje inverza u $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Ako je $(a, b) \neq (0, 0)$, tj. ako je barem jedan od brojeva a i b različit od nule, tada postoji $(x, y) \in \mathbb{C}$ tako da vrijedi

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0).$$

Zaista, sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

u tom je slučaju rješiv i rješenje je

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Vrijedi

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Komutativnost zbrajanja. Imamo:

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

ili

$$(a + c, b + d) = (c + a, d + b)$$

jer je zbrajanje realnih brojeva komutativna operacija.

Komutativnost množenja. Imamo:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

ili

$$(ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da)$$

jer je množenje realnih brojeva komutativna operacija.

Ovim smo pokazali da je $(\mathbb{C}, +)$ Abelova grupa i zove se aditivna grupa kompleksnih brojeva. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ $(\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus (0, 0))$ je Abelova grupa i zove se multiplikativna grupa kompleksnih brojeva različitih od nule.

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ podskup je skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, jer svaki $a \in \mathbb{R}$ možemo pisati u obliku $a = a + 0 \cdot i = (a, 0)$, tj. $a = (a, 0) \in \mathbb{C}$. Dakle, identificiramo li općenito par $(x, 0)$ s realnim brojem x, možemo pisati, ne ulazeći strogo u algebarsko obrazloženje izomorfizma, da je $\mathbb{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, tj. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Zgodno je na kraju, iz obilja zanimljivosti o skupu kompleksnih brojeva, izdvojiti i sljedeće: kompleksni broj $a + bi$, osim što ga možemo identificirati s uređenim parom

(a,b) možemo to i s matricom

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

jer tada zbroju (umnošku) brojeva $a+bi$, $c+di$ odgovara zbroj (umnožak) matrica:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}.$$

To su matrice

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}.$$

Hamilton[3] je prvi uočio kako se s kompleksnim brojevima može postupati kao s uređenim parovima realnih brojeva. Kompleksni brojevi imaju veliku primjenu u fizici i inženjerstvu.

Skup kvaterniona

Skup svih uređenih četvorki realnih brojeva $\mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ i na njemu definirane operacije zbrajanja i množenja ovako:

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) + (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2) \tag{3}$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \cdot (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a,b,c.d) \tag{4}$$

gdje je

$$a = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, \tag{4_1}$$

$$b = a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1, \tag{4_2}$$

$$c = a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - b_1d_2, \tag{4_3}$$

$$d = a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1. \tag{4_4}$$

zove se *Hamiltonov sustav kvaterniona* ili kraće *skup kvaterniona*.

Taj skup označavat ćemo s $\mathbb{K}$. Dobili smo grupoidne strukture $(\mathbb{K},+)$ i $(\mathbb{K} \setminus (0,0,0,0), \cdot)$.

Identificiramo li uređenu četvorku $(x,y,0,0)$ s uređenim parom (x,y), uz postojanje izomorfnog preslikavanja $(x,y) \to (x,y,0,0)$, možemo pisati $\mathbb{C} = \{(x,y,0,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, gdje je na osnovu (3) i (4)

$$(a_1,b_1,0,0) + (a_2,b_2,0,0) = (a_1+a_2, b_1+b_2, 0, 0)$$

$$(a_1,b_1,0,0) \cdot (a_2,b_2,0.0) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1, 0, 0).$$

Dakle, vrijedi $\mathbb{C} \subset \mathbb{K}$, tj. skup kompleksnih brojeva podskup je skupa kvaterniona. Analogno, možemo $(x,0,0,0)$ jednostavno identificirati s x.

[3] W. R. Hamilton, irski matematičar, (1805. – 1829.).

Ako uvedemo oznake

$$1=(1,0,0,0), \quad i=(0,1,0,0), \quad j=(0,0,1,0), \quad k=(0,0,0,1),$$

možemo kvaternion (a,b,c,d) pisati u obliku

$$(a,b,c,d)=(a,0,0,0)\cdot 1+(b,0,0,0)\cdot i+(c,0,0,0)\cdot j+(d,0,0,0)\cdot k$$

(uvjerite se u to). Konačno, uz gornju identifikaciju, možemo pisati

$$(a,b,c,d)=a+bi+cj+dk,$$

analogno kao što smo kod kompleksnih brojeva imali $(a,b)=a+bi$.

Za kvaternione $z=a+bi+cj+dk$ i $\overline{z}=a-bi-cj-dk$, kažemo da su konjugirani. Lako se uvjeriti da je $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2+c^2+d^2$, jer na osnovu (4) vrijedi: $i\cdot j=k$, $j\cdot k=i$, $k\cdot i=j$, $j\cdot i=-k$, $k\cdot j=-i$, $i\cdot k=-j$.

Znači, svaki kompleksni broj $z=a+bi$ ili $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ možemo pisati u obliku $z=a+bi+0\cdot j+0\cdot k$ ili $z=(a,b,0,0)\in\mathbb{K}$.

Možemo zaključiti, iz svega prethodno izloženog, da je sustav kvaterniona zapravo poopćenje sustava kompleksnih brojeva. U nastavku se osvrnimo na svojstva operacija zbrajanja i množenja u skupu $\mathbb{K}$, bez neke detaljne raščlambe i izbjegavanja ulaska u širinu i dubinu samog članka. Neke provjere ostavit ćemo i samom čitatelju.

Asocijativnost zbrajanja. Vrijedi:

$$\begin{aligned}&[(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)]+(a_3,b_3,c_3,d_3)\\&=(a_1,b_1,c_1,d_1)+[(a_2,b_2,c_2,d_2)+(a_3,b_3,c_3,d_3)]\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}&[(a_1+a_2)+a_3,(b_1+b_2)+b_3,(c_1+c_2)+c_3,(d_1+d_2)+d_3]\\&=[a_1+(a_2+a_3),b_1+(b_2+b_3),c_1+(c_2+c_3),d_1+(d_2+d_3)],\end{aligned}$$

jer je zbrajanje realnih brojeva asocijativna operacija.

Neutralni element u $(\mathbb{K},+)$ je $(0,0,0,0)$, a lako se provjeri da svaki $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}$ ima svoj inverz $(-a,-b,-c,-d)\in\mathbb{K}$ za zbrajanje.

Komutativnost zbrajanja. Imamo:

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_2,b_2,c_2,d_2)+(a_1,b_1,c_1,d_2),$$

odnosno,

$$(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2)=(a_2+a_1,b_2+b_1,c_2+c_1,d_2+d_1),$$

jer je zbrajanje realnih brojeva komutativna operacija.

Asocijativnost množenja. Vrijedi:

$$\begin{aligned}&[(a_1,b_1,c_1,d_1)\cdot(a_2,b_2,c_2,d_2)]\cdot(a_3,b_3,c_3,d_3)\\&=(a_1,b_1,c_1,d_1)\cdot[(a_2,b_2,c_2,d_2)\cdot(a_3,b_3,c_3,d_3)].\end{aligned}\tag{5}$$

Provjerite to sami.

Vidimo, zbog toga što je zbrajanje realnih brojeva asocijativno i množenje realnih brojeva komutativno, da smo dobili jednake kvaternione na lijevoj i desnoj strani od (5). Time smo dokazali asocijativnost operacije množenja u skupu $\mathbb{K}$.

Postojanje neutralnog elementa. Skup $\mathbb{K}$ sadrži element $(1,0,0,0)$ tako da za svaki $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}$ vrijedi

$$(a,b,c,d)\cdot(1,0,0,0)=(a,b,c,d).$$

Prema tome $(1,0,0,0)$ je neutralni element u $(\mathbb{K}\setminus(0,0,0,0),\cdot)$.

Postojanje inverza u $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$. Može se pokazati da za svaki $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}$, $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$ postoji njegov inverz $(x,y,z,u) \in \mathbb{K}$, tj. vrijedi $(a,b,c,d) \cdot (x,y,z,u) = (1,0,0,0)$. Traženi inverz ima oblik:

$$x = \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2},$$
$$z = \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \quad u = \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

koji se dobije rješavanjem odgovarajućeg sustava od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice. Koristeći pravilo množenja kvaterniona (4) lako se provjeri

$$(a,b,c,d) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \right)$$
$$= (1,0,0,0).$$

Operacija množenja kvaterniona općenito nije komutativna, jer vidimo na primjer $(0,0,0,1) \cdot (0,1,0,0) = (0,0,1,0)$ dok je $(0,1,0,0) \cdot (0,0,0,1) = (0,0,-1,0)$.

Distributivnost množenja prema zbrajanju. Vrijedi:

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \cdot [(a_2,b_2,c_2,d_2) + (a_3,b_3,c_3,d_3)]$$
$$= (a_1,b_1,c_1,d_1) \cdot (a_2,b_2,c_2,d_2) + (a_1,b_1,c_1,d_1) \cdot (a_3,b_3,c_3,d_3).$$

Dakle, $(\mathbb{K}, +)$ je komutativna (Abelova) grupa, a $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ je grupa gdje je $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus (0,0,0,0)$.

Ovdje bi se zaustavili u svojevrsnoj "šetnji" od skupa prirodnih brojeva do skupa kvaterniona. Makar bi ovaj niz izgradnje novih sustava brojeva preko strukture $\mathbb{R}^{2^n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ mogli nastaviti i dalje. No to nije tema ovog članka. Cilj nam je bio izgraditi postupno niz skupova brojeva $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{I} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{K}$, i dati neka svojstva takvih algebarskih struktura, tj. ispitati grupoidnost, odnosno prezentirati svojstva algebarskih operacija definiranim na navedenim skupovima brojeva. Nadamo se da smo u tome uspjeli i kod čitatelja ovog članka pobudili zanimanje i dali znanje koje može biti korisno za početak bavljenja teorijom brojeva.

Literatura

[1] M. Radić, *Algebra*, I dio, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[2] W. R. Hamilton, *On quaternions*, Proceedings of the Royal Irish Academy 3 (1847), pp. 1–16.

[3] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academy Press, New York-London, 1966.

[4] Đ. Kurepa, *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

[5] D. W. Lewis, *Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton's quaternions*, Irish Math. Soc. Bull. 57 (2006), 41–64.